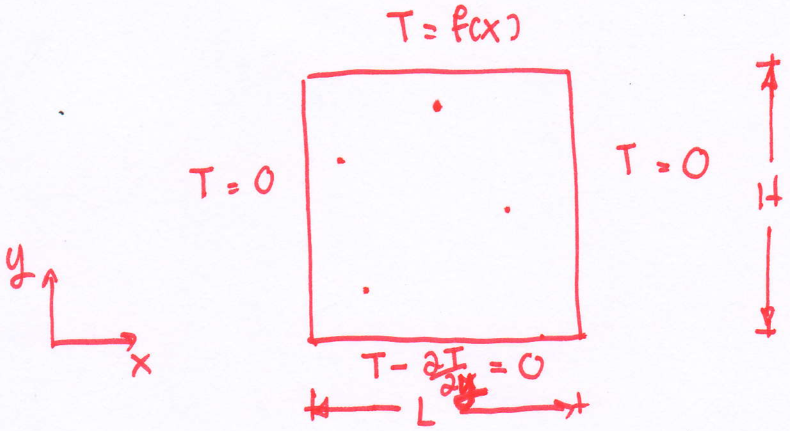
- Laplace eq.

2D, steady state Heat conduction

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

กรณีศึกษา
$f(x)$ = ค่าคงที่



ผลเฉลย ของสมการ $T(x,y) = G(x)\,H(y)$

นำ ผลเฉลย $T(x,y) = G(x)\,H(y)$ แทนในสมการควบคุม

$$\frac{\partial^2 [G(x)\,H(y)]}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 [G(x)\,H(y)]}{\partial y^2} = 0$$

$$H(y)\frac{\partial^2 G(x)}{\partial x^2} + G(x)\frac{\partial^2 H(y)}{\partial y^2} = 0$$

$$H(y)\,G''(x) = -G(x)\,H''(y)$$

$$\frac{G''(x)}{G(x)} = -\frac{H''(y)}{H(y)}$$

จากสมการข้างต้น พบว่า ทั้งสองข้าง ของสมการ ต้องเป็น ค่าคงที่ จึงจะทำให้สมการ เป็น จริง

กำหนด ค่าคงที่ $= -\lambda^2$

เราจะได้ 2 สมการ ดังนี้

① $\frac{1}{G(x)} G''(x) = -\lambda^2$ แก้สมการ $\Rightarrow G(x) = \ldots\ldots$

② $-\frac{1}{H(y)} H''(y) = -\lambda^2$ แก้สมการ $\Rightarrow H(y) = \ldots\ldots$

แก้สมการ ①

$$\frac{1}{G(x)} G''(x) = -\lambda^2$$

$$G''(x) + \lambda^2 G(x) = 0 \quad , \quad \frac{d^2G(x)}{dx^2} + \lambda^2 G(x) = 0$$

characteristic eq.

$$\sigma^2 + \lambda^2 = 0$$

$$\sigma^2 = -\lambda^2$$

$$\sigma = \pm \lambda i$$

$$G(x) = A_1 \sin \lambda x + B_1 \cos \lambda x$$

หาค่าขอบเขตมาใช้ เพื่อหาค่าคงที่ A_1 , B_1

เมื่อ $x = 0$, $T = 0$

$$T(x,y) = G(x) H(y)$$

$$T(0,y) = G(0) \underbrace{H(y)}_{\neq 0} = 0$$

$$\therefore G(0) = 0$$

$$G(0) = 0 = A_1 \sin \lambda \cdot 0 + B_1 \cos \lambda \cdot 0$$

$$\boxed{0 = B_1}$$

$$G(x) = A_1 \sin \lambda x$$

เมื่อ $x = L, \quad T = 0$

$$T(L, y) = G(L) \underbrace{H(y)}_{\neq 0} = 0$$

$$\therefore \quad G(L) = 0$$

$$G(L) = \underbrace{A_1}_{\neq 0} \sin \lambda L = 0$$

$$\sin \lambda L = 0 \quad ; \lambda \neq 0$$

$$\lambda L = \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$$

$$\lambda = \frac{\pi}{L}, \frac{2\pi}{L}, \frac{3\pi}{L}, \ldots$$

เขียน λ ให้อยู่ในรูปทั่วไป

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{L} \quad \text{โดยที่ } n = 1, 2, 3, \ldots$$

สำหรับผลเฉลยในโหมด n ใดๆ

$$\boxed{G_n(x) = A_{1n} \sin \lambda_n x}$$

$T(x,y) = G(x)\, H(y)$

แก้ สมการ ②

$$-\frac{1}{H(y)} H''(y) = -\lambda^2$$

$$\frac{1}{H(y)} H''(y) = \lambda^2$$

$$H''(y) - \lambda^2 H(y) = 0$$

characteristic eq.

$$\sigma^2 - \lambda^2 = 0$$

$$\sigma^2 = \lambda^2$$

$$\sigma = \pm\lambda$$

$$H(y) = \tilde{A}_2 e^{\lambda y} + \tilde{B}_2 e^{-\lambda y}$$

$$H(y) = A_2 \sinh \lambda y + B_2 \cosh \lambda y$$

นิยาม $\sinh(y) = \frac{e^{y} - e^{-y}}{2}$, $\sinh(\lambda y) = \frac{e^{\lambda y} - e^{-\lambda y}}{2}$

$\cosh(y) = \frac{e^{y} + e^{-y}}{2}$, $\cosh(\lambda y) = \frac{e^{\lambda y} + e^{-\lambda y}}{2}$

เลือก ใช้ แบบไหน $H(y)$

$$H(y) = A_2 \sinh(\lambda y) + B_2 \cosh(\lambda y)$$

เมื่อ $y = 0$, $T - \frac{\partial T}{\partial y} = 0$

$$T(x,0) - \frac{\partial T(x,0)}{\partial y} = 0$$

$$\underbrace{G(x)}_{\neq 0} H(0) - \frac{\partial \overbrace{G(x)}^{\neq 0} H(0)}{\partial y} = 0$$

$$H(0) - H'(0) = 0$$

$$H'(y) = A_2[\cosh(\lambda y)]\lambda + B_2[\sinh(\lambda y)]\lambda$$

$$\frac{dH(y)}{dy} = H'(y) = A_2 \lambda \cosh(\lambda y) + B_2 \lambda \sinh(\lambda y)$$

$$A_2 \underbrace{\sinh(\lambda.0)}_{=0} + B_2 \underbrace{\cosh(\lambda.0)}_{=1} - \left[A_2 \lambda \underbrace{\cosh(\lambda.0)}_{=1} + B_2 \lambda \underbrace{\sinh(\lambda.0)}_{=0} \right]$$

$$B_2 - A_2 \lambda = 0$$

$$B_2 = A_2 \lambda$$

ดังนั้น ผลเฉลย

$$H(y) = A_2 \sinh(\lambda y) + A_2 \lambda \cosh(\lambda y)$$

สำหรับ ผลเฉลย ของ โหมด n ใดๆ

$$\boxed{H_n(y) = A_{2n} \sinh(\lambda_n y) + A_{2n} \lambda_n \cosh(\lambda_n y)}$$

ผลเฉลย ของ $G_n(x)$ และ $H_n(y)$

$$T_n(x,y) = A_{1n} \sin(\lambda_n x) \cdot \left[A_{2n} \sinh(\lambda_n y) + A_{2n} \lambda_n \cosh(\lambda_n y) \right]$$

$$T_n(x,y) = K_n \sin(\lambda_n x) \left[\sinh(\lambda_n y) + \lambda_n \cosh(\lambda_n y) \right]$$

โดยที่ $K_n = A_{1n} A_{2n}$

ดังนั้น ผลเฉลย ของ ทุกๆ ค่า ของ ผลรวม โดยที่ n จะทำให้ได้ผลเฉลยสุดท้าย

$$T(x,y) = c_1 T_1(x,y) + c_2 T_2(x,y) + c_3 T_3(x,y), \ldots$$

$$T(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n K_n (\sin \lambda_n x)\left[\sinh(\lambda_n y) + \lambda_n \cosh(\lambda_n y)\right]$$

$$T(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{c}_n \sin(\lambda_n x)\left[\sinh(\lambda_n y) + \lambda_n \cosh(\lambda_n y)\right]$$

หาค่า $\tilde{c}_n$

เมื่อ $y = H$, $T = f(x)$ = ค่าคงที่ (กรณีอย่างง่าย)

$$T(x,H) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{c}_n \sin(\lambda_n x)\underbrace{\left[\sinh(\lambda_n H) + \lambda_n \cosh(\lambda_n H)\right]}_{\text{ค่าคงที่ } = D_n}$$

$$f(x) = T(x,H) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{c}_n D_n \sin(\lambda_n x)$$

เนื่องจาก เทอม $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\lambda_n x)$ มีโอกาสที่จะเป็นศูนย์

เราจึงต้อง ใช้ หลักการ Orthogonality เพื่อไม่ให้ ผลเฉลยสุดท้ายมี ค่า เป็นศูนย์ โดยการ คูณ $\sin(\lambda_n x)$ ตลอด สมการ และอินทิเกรต จาก $x=0$ ถึง $x=L$

$$\int_0^L f(x) \cdot \sin(\lambda_n x) = \int_0^L \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{c}_n D_n \sin(\lambda_n x) \cdot \sin(\lambda_n x)$$

ค่าคงที่

$$\int_0^L \sin^2(\lambda_n x) = \frac{L}{2}$$

$$f(x) \int_0^L \sin(\lambda_n x) = \frac{L}{2} \tilde{c}_n D_n$$

$$\tilde{c}_n = \frac{2 f(x)}{L D_n} \int_0^L \sin(\lambda_n x)$$

$$\tilde{c}_n = \frac{2f(x)}{LD_n}\left[-\frac{\cos(\lambda_n x)}{\lambda_n}\right]_0^L$$

$$\tilde{c}_n = \frac{2f(x)}{LD_n}\left[\frac{-\cos(\lambda_n L) - (-1)}{\lambda_n}\right]$$

$$\tilde{c}_n = \frac{2f(x)}{LD_n}\left[\frac{1 - \cos(\lambda_n L)}{\lambda_n}\right]$$

สรุปผลเฉลย

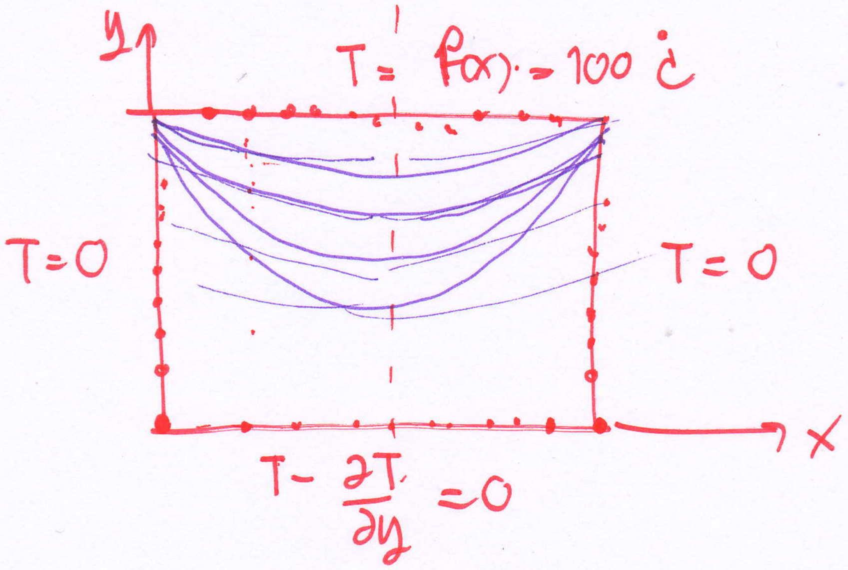
$$T(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2f(x)}{LD_n} \cdot \sin(\lambda_n x)\left[\sinh(\lambda_n y) + \lambda_n \cosh(\lambda_n y)\right]$$

$$\boxed{T(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2f(x)}{LD_n}\overset{\left[\frac{1-\cos(\lambda_n L)}{\lambda_n}\right]}{\cdot} \sin(\lambda_n x)\left[\sinh(\lambda_n y) + \lambda_n \cosh(\lambda_n y)\right]}$$

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$D_n = \sinh(\lambda_n H) + \lambda_n \cosh(\lambda_n H)$$

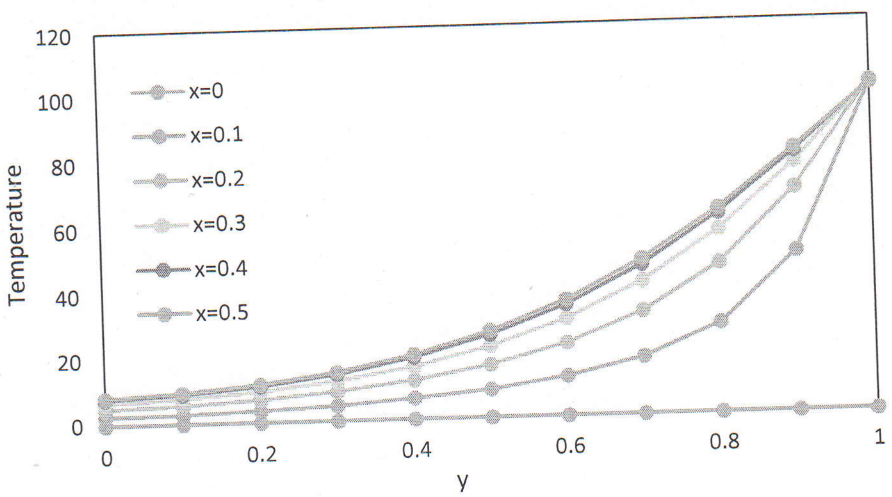
Ex_2



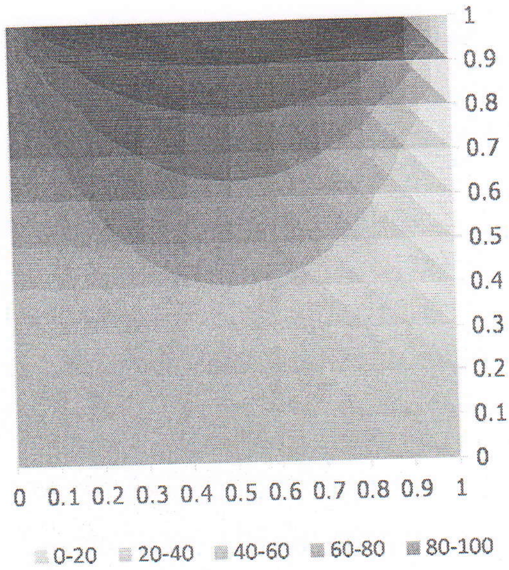
$$T = \frac{\partial T}{\partial y}$$

y/x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
0	0	2.582	4.908	6.749	7.927	8.333	7.927	6.749	4.908	2.582	0
0.1	0	2.975	5.653	7.771	9.126	9.592	9.126	7.771	5.653	2.975	0
0.2	0	3.671	6.969	9.57	11.23	11.8	11.23	9.57	6.969	3.671	0
0.3	0	4.749	8.998	12.33	14.44	15.16	14.44	12.33	8.998	4.749	0
0.4	0	6.341	11.97	16.32	19.05	19.98	19.05	16.32	11.97	6.341	0
0.5	0	8.672	16.25	21.98	25.49	26.66	25.49	21.98	16.25	8.672	0
0.6	0	12.16	22.46	29.89	34.27	35.7	34.27	29.89	22.46	12.16	0
0.7	0	17.69	31.68	40.91	45.98	47.58	45.98	40.91	31.68	17.69	0
0.8	0	27.54	45.92	56.08	61.06	62.56	61.06	56.08	45.92	27.54	0
0.9	0	48.98	68.36	76.13	79.45	80.4	79.45	76.13	68.36	48.98	0
1	0	99.7	100.4	100.3	99.91	99.72	99.91	100.3	100.4	99.7	0

Temperture Distribution



Temperature Contours



การบ้านของ พี่จ้อบ

$$2\ddot{x} + 3\dot{x} + 5x = 0 \Rightarrow x(t)$$

$$x(0) = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$\dot{x}(0) = 0$$

วิธีทำ

$$\mathcal{L}[2\ddot{x} + 3\dot{x} + 5x] = \mathcal{L}[0]$$

$$\left.\begin{aligned} &2[s^2X(s) - s\underbrace{x(0)}_{=\frac{1}{2}} - \underbrace{\dot{x}(0)}_{=0}] \\ &+3[sX(s) - \underbrace{x(0)}_{=\frac{1}{2}}] \\ &+5[X(s)] \end{aligned}\right\} = 0$$

$$[2s^2 + 3s + 5]X(s) - s - \frac{3}{2} = 0$$

$$X(s) = \frac{s + \frac{3}{2}}{2s^2 + 3s + 5}$$

$$= \frac{s + \frac{3}{2}}{2[s^2 + \frac{3}{2}s + \frac{5}{2}]}$$

$$= \frac{s + \frac{3}{2}}{2[s^2 + \frac{3}{2}s + (\frac{3}{4})^2 - (\frac{3}{4})^2 + \frac{5}{2}]}$$

$$= \frac{s + \frac{3}{2}}{2[(s + \frac{3}{4})^2 - \frac{9}{16} + \frac{5}{2}]}$$

$$X(s) = \frac{s + \frac{3}{2}}{2[(s + \frac{3}{4})^2 + \frac{31}{16}]}$$

จาก การ พิจารณา ตาราง แปลงลาปลาซ

$$\frac{a}{(s-b)^2+a^2} \overset{L^{-1}}{\Longrightarrow} e^{bt}\sin(at)$$

$$\frac{s-b}{(s-b)^2+a^2} \overset{L^{-1}}{\Longrightarrow} e^{bt}\cos(at)$$

จาก ผลเฉลย

$$X(s) = \frac{s+\frac{3}{2}}{2\left[(s+\frac{3}{4})^2+\frac{31}{16}\right]}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{s}{(s+\frac{3}{4})^2+\frac{31}{16}} + \frac{\frac{3}{2}}{(s+\frac{3}{4})^2+\frac{31}{16}}\right]$$

①　②

พิจารณา

① :

$$\frac{s}{(s+\frac{3}{4})^2+\frac{31}{16}} = \frac{s+\frac{3}{4}-3/4}{(s+\frac{3}{4})^2+\frac{31}{16}}$$

$$= \frac{s+\frac{3}{4}}{(s+\frac{3}{4})^2+\left(\sqrt{\frac{31}{16}}\right)^2} - \frac{3/4}{(s+\frac{3}{4})^2+\left(\sqrt{\frac{31}{16}}\right)^2}$$

เทอม $\frac{s+3/4}{(s+3/4)^2+\left(\sqrt{\frac{31}{16}}\right)^2} \overset{L^{-1}}{\Longrightarrow} e^{-3/4t}\cos\left(\sqrt{\frac{31}{16}}t\right)$

เทอม $\frac{3/4}{(s+3/4)^2+\left(\sqrt{\frac{31}{16}}\right)^2} = \frac{\boxed{3/4\times\sqrt{\frac{16}{31}}}\times\sqrt{\frac{31}{16}}}{(s+3/4)^2+\left(\sqrt{\frac{31}{16}}\right)^2}$

$$\frac{3}{4}\times\sqrt{\frac{16}{31}}\;\frac{\sqrt{31/16}}{(s+3/4)^2+\left(\sqrt{\frac{31}{16}}\right)^2}\;\overset{L^{-1}}{\Longrightarrow}\;\frac{3}{4}\sqrt{\frac{16}{31}}\,e^{-3/4\,t}\sin\left(\sqrt{\frac{31}{16}}\,t\right)$$

แล้วหา L^{-1} ของ เทอม (1) เราจะได้ ผลเฉลย มีค่า

$$e^{-3/4\,t}\cos\left(\sqrt{\frac{31}{16}}\,t\right)-\frac{3}{4}\sqrt{\frac{16}{31}}\,\underline{e^{-3/4\,t}\sin\left(\sqrt{\frac{31}{16}}\,t\right)}$$

พิจารณา

(2) :

$$\frac{3/2}{(s+\frac{3}{4})^2+\left(\sqrt{\frac{31}{16}}\right)^2}=\frac{\frac{3}{2}\times\sqrt{\frac{16}{31}}\times\sqrt{\frac{31}{16}}}{(s+\frac{3}{4})^2+\left(\sqrt{\frac{31}{16}}\right)^2}$$

$$\frac{3}{2}\sqrt{\frac{16}{31}}\cdot\frac{\sqrt{31/16}}{(s+\frac{3}{4})^2+\left(\sqrt{31/16}\right)^2}\;\overset{L^{-1}}{\Longrightarrow}\;\frac{3}{2}\sqrt{\frac{16}{31}}\,\underline{e^{-3/4\,t}\sin\left(\sqrt{\frac{31}{16}}\,t\right)}$$

รวมผลเฉลย ทั้ง เทอม (1) และ (2)

$$x(t)=\frac{1}{2}\left[e^{-3/4\,t}\cos\left(\sqrt{\frac{31}{16}}\,t\right)+\frac{3}{4}\sqrt{\frac{16}{31}}\,e^{-3/4\,t}\sin\left(\sqrt{\frac{31}{16}}\,t\right)\right]$$